

論文

不確実性下の利益計画モデルとC-V-P分析 ——確率制約条件計画法の利用——

浜田 和樹*

<論文要旨>

本稿において、確率制約条件計画法を用いた利益計画モデルと、その最適解を用いたC-V-P分析について考察する。C-V-Pの関係を知れば、利益算出過程の総合的な把握が可能となり、検討箇所が明確になる。

数理計画法とC-V-P分析は、直接には関係をもたないが、数理計画法によって求められた解を用いて、C-V-P分析を行えば、制約条件付きの多品種製品ミックス問題を、容易に扱うことができるという利点をもっている。しかも、モデルの定式化の仕方を変えることによって、さまざまな問題に対処できることになる。

本稿は、基本的特徴のみを明らかにするために、モデルを極力簡単化し、販売価格のみを確率変数と仮定している。そして、2種類の確率制約条件計画法を用いた利益計画モデルの特徴を、図を用いて詳細に検討する。図を用いることによって、モデルの特徴がかなり明確になるからである。また、モデルの係数の変化による最適解への影響も図を用いて示し、C-V-Pの関係にいかなる影響を及ぼすかについて考察する。

<キーワード>

利益計画モデル, C-V-P分析, 確率制約条件計画法, 不確実性, 損益分岐点

1992年12月 受付

1993年 7月 受理

* 西南学院大学教授 (商学部商学科)

1. はじめに

企業が計画を立てるとき、 $C-V-P$ （原価—営業量—利益）の関係を考慮に入れた検討が必要であり、それにより利益算出過程の総合的な検討が可能となる。それゆえ、会計学の分野において、この種の研究は数多くなされている。これらの研究を整理すれば、短期の $C-V-P$ モデルについて、確実性下の問題を扱っているもの、不確実性下の問題を扱っているものに分けることができる。そして、不確実性下の問題を扱う場合には、その意味として、何もわからないという意味ではなく、確率情報がわかっているという意味を採用している。特に、確率変数の分布が正規分布であると仮定し、期待値と分散がわかっている場合を扱ったものが多い。

また、不確実性下のモデルに限定しても、製品の種類が単一種類である場合を扱ったもの、多品種製品の場合を扱ったものに区分できる。多品種問題を扱う場合には、期待値や分散と同様に、製品相互間の共分散や相関係数を知ることが必要になる。本稿は多品種製品を生産、販売している企業の不確実性下の問題について述べるが、これらの大多数の研究と同様に、確率変数の分布を正規分布と仮定した場合に限定して考察する。

不確実性下の $C-V-P$ の数理モデルを扱う一つの方法として、統計学の理論を利用したモデルが研究されている。このような統計学の理論を用いたモデルは、伝統的な確実性下の $C-V-P$ 分析の方法を不確実性下の問題に適用できるようにするための一つの試みであると思われる。このモデルは利益をもたらす確率、損失が生ずる確率、ある目標利益以上の利益をもたらす確率等の算定や、ある目標を達成する信頼区間の算定に焦点を当てている。

Robert K. Jaedicke, Alexander A. Robichek の論文 [6] では、まず生産販売量のみを正規分布する確率変数とした場合を扱い、次に、生産販売量、販売価格、変動費、固定費のすべてが確率変数の場合へとモデルを展開している。しかし、利益の算定には正規分布をする二変数の積の項目が含まれ、この積の分布は正規分布しないにもかかわらず、これが正規分布するとして問題を扱っている。この点を Jimmy E. Hillard, Robert A. Leitch [5] が批判し、個々の確率変数が対数正規分布をすると仮定して論を展開した。これは、対数正規分布をする二変数の積の分布はやはり対数正規分布をするという点に着目している。これに対し、Mawsen Liao [9] は Hillard, Leitch の説を批判し、William L. Ferrara, Jack C. Hayya, David A. Nachman [4] は偏差係数がどのような値をとるとき、積の分布は正規分布となるかを検証した。これらの研究は、基本的には製品が単一品種のみ存在すると仮定した研究である。多品種製品の生産を前提とした研究として、Glenn L. Johnson, Stephen Simik [7] の研究がある。

不確実性下のC-V-Pの数理モデルを扱うもう一つの方法として、確率付きの数理計画法の最適解を利用する方法がある。この方法も確率を利用するという意味で、統計学の理論を利用することになる。その意味で、この方法は、数理計画法と統計学の両者の理論によっていることになる。もちろん、不確実性下の問題に、確率付数理計画法を用いないで、感度分析やパラメトリック・プログラミングを弾力的に用いて対処することも可能である。

C-V-P分析と数理計画法は直接には関係をもたないが、数理計画法によって求められた解を用いてC-V-P分析を行えば、制約条件付きの多品種製品ミックス問題を扱うことができるという利点をもっている。このようなC-V-P分析法も伝統的なC-V-P分析法の一つの展開である。しかも、モデルの定式化の仕方によって、さまざまな問題に対処できることになる。ただ、この方法によれば、最適解のみを用いるので、可能解の全てと利益の関係を示していないという点で欠点もある。しかし、最適解を基にしたC-V-P分析は、企業の活動目標となるような企業の制約条件下での最適活動と利益の関係を示しているという利点がある。

確率付数理計画法は種々のものがあるが、本稿は確率制約条件計画法をモデル化の手法として採用する。確率制約条件計画法は、各制約条件を満たす確率の範囲内で最適解を求める問題、目的関数値がある値以上あるいは以下となる確率を最大化または最小化する問題に用いられる計画法である。また、この計画法は数個の制約条件を同時に満足する同時確率条件が与えられる場合にも拡張できる。

確率制約条件計画法の研究は、管理科学の分野において、A.Charnes,W.W.Cooper [2]によって行われ、Eモデル、Vモデル、Pモデルに分けたモデル化がなされている。その後、管理科学の分野でこの種の研究がなされ、この影響を受けて、会計学の分野でも多くの論文が現れている。会計学の分野での近年の研究として、P. Brockett, A. Charnes, W. W. Cooper, Hong-Chul Shin [1]は需要量を確率変数として、モデルを定式化し、確率条件付損益分岐制約をもつ利益最大化モデルを考察している。そして、需要量と生産量の小さい方で実際の販売量が決定されるので、これを基に、売上実現関数をつくり、この売上実現関数を用いたモデルを確率制約条件計画法により、定式化している。また、Joyce T. Chen [3]は確率条件付損益分岐制約と、確率条件付目標利益制約がある場合を考察し、3種類のモデルを示している。そして、確率制約条件計画法をパラメトリック二次計画法によって解く解法を示している。

本稿は、これらの論文を主として参考にしなが、不確実性下の問題に接近する。C-V-P分析は、原価を営業量との関係のみで、変動費と固定費に分け、その他の原価を変

化させる原因を考慮していないという批判もある。これは重要な問題点ではあるが、多種の要因を考慮に入れたモデルは、計算は複雑となるが、数理計画法を用いて、同様の方法で作成できる。

本稿は、モデルの基本的特徴等を調べ、そのモデルの適用可能性について考察する。そのため、モデルを極力簡単にするために、原価は営業量との関係のみで変化するとあえて仮定することにする。しかも、販売価格のみを確率変数と仮定している。そして、モデルの最適解を基にC-V-P分析を行う方法について考察する。また、モデルの係数の変化による最適解への影響、C-V-P関係への影響について考察する。

2. 不確実性下の利益計画モデルの基本的検討

確率制約条件計画法による利益計画について述べる前に、まず最初に、不確実性下の問題についての基本的な検討を行う。というのは、基本的な検討を行うことにより、確率制約条件計画法の特徴がより明確になると思うからである。

モデルを簡単にするために、生産量と販売量が同じであると仮定し、表記を

π —— 限界利益

p —— 生産販売量の単位当たりの販売価格を表す列ベクトル

v —— 生産販売量の単位当たりの変動費を表す列ベクトル

c —— 生産販売量の単位当たりの限界利益係数を表す列ベクトル

x —— 生産販売量の列ベクトル

のようにすれば、限界利益は、

$$\pi = (p' - v')x = c'x$$

から求められる。ただし、生産販売量(x)は生産販売可能集合(X)に属することが必要である。生産販売可能集合は、凸集合とする。

凸集合とは、ある集合に属する任意の2つのベクトルの凸結合を作れば、またそのベクトルが必ずその集合に属するという性質をもつ集合のことである。すなわち、凸集合とは、任意の y_1, y_2 について、 $y_1 \in X, y_2 \in X$, であれば、その凸結合もまた、

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in X$$

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0$$

という特徴をもつ集合のことである

販売価格のみを確率変数とし、その他は確定的なものと仮定してみる。これは販売価格のみが生産量と独立に流動的であるという状態、すなわち市場状態が、独占や寡占の場合に妥当する。独占の場合は、全面的に自社の立場から価格を決定できるが、新製品の価格

決定を行う場合等には、企業内外の環境条件を考慮して決定しなければならない。また寡占の場合であれば、相手企業の対抗策を考えて、現行価格を維持することが、経済理論によれば一般的に最適であるといわれている。しかし現実の企業では、製品の差別化を行いながら価格改定を行うのがむしろ普通である。そのような場合、相手企業の反応等の企業内外の環境条件を考慮に入れながら販売価格が決定されることになる。また新製品を市場に出そうとする場合も、同様の考察が必要である。それ故、環境条件が確率変数で表されるとすれば、価格も確率変数として扱うことが適当である。

販売価格を確率変数とすれば、限界利益係数も限界利益も確率変数となる。モデルを簡単にするために、限界利益係数 (c) の平均値と分散共分散行列は推定されるものでなく、既知であると仮定し、具体的に、平均値 ($\bar{c}$)、分散共分散 (W) である確率変数と仮定してみる。そして、 X に属する x に対して、 $\bar{c}'x$ と $\sqrt{x'Wx}$ の関係を考えてみる。というのは $\bar{c}'x$ が増大するにつれて、

$\sqrt{x'Wx}$ は増大することは明らかであるが、 $\sqrt{x'Wx}$ が凸性をもって変化するかどうかを、後の論の展開において知る必要があるからである。そのため生産可能集合に属する任意の2点、 y_1, y_2 を選び、凸結合を作り、凸性の判定を行ってみる。ただし、

$\bar{c}'y_1 \leq \bar{c}'y_2$, であるとする。

(i) $x = y_1$ の場合

$$\text{平均値} \quad \bar{c}'x = \bar{c}'y_1$$

$$\text{標準偏差} \quad \sqrt{x'Wx} = \sqrt{y_1'W y_1}$$

(ii) $x = y_2$ の場合

$$\text{平均値} \quad \bar{c}'x = \bar{c}'y_2$$

$$\text{標準偏差} \quad \sqrt{x'Wx} = \sqrt{y_2'W y_2}$$

(iii) $x = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned} \text{平均値} \quad \bar{c}'x &= \bar{c}'(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1 \bar{c}'y_1 + \lambda_2 \bar{c}'y_2 \end{aligned}$$

$$\text{標準偏差} \quad \sqrt{x'Wx} = \sqrt{(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' W (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)}$$

(iii) で求められる標準偏差が、 λ_1, λ_2 の全ての値に対して凸かどうかを調べるためには、

$$\sqrt{(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' W (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)} \quad \text{と} \quad \lambda_1 \sqrt{y_1' W y_1} + \lambda_2 \sqrt{y_2' W y_2}$$

の大小関係を見ればよい。そして、もし前者が後者よりも小さければ、 λ_1, λ_2 の全ての値に対し凸となる。

それ故、

$$\sqrt{(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' W (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)} - (\lambda_1 \sqrt{y_1' W y_1} + \lambda_2 \sqrt{y_2' W y_2})$$

の符号を調べればよい。この証明は、既に、Shinji Kataoka [8] によってなされている。要約して示せば、次の通りである。

$$\begin{aligned}
 & \text{Sign} \left[\sqrt{(\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2)' W (\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2)} \right. \\
 & \quad \left. - (\lambda_1 \sqrt{\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1} + \lambda_2 \sqrt{\mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2}) \right] \\
 &= \text{Sign} \left[(\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2)' W (\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2) \right. \\
 & \quad \left. - (\lambda_1 \sqrt{\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1} + \lambda_2 \sqrt{\mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2})^2 \right] \\
 &= \text{Sign} \left[\lambda_1^2 \mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1 + 2\lambda_1(1-\lambda_1) \mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_2 + (1-\lambda_1)^2 \mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2 \right. \\
 & \quad \left. - \lambda_1^2 \mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2 - 2\lambda_1 \sqrt{\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1} \sqrt{\mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2} - (1-\lambda_1)^2 \mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2 \right] \\
 &= \text{Sign} \left[2\lambda_1(1-\lambda_1) \{ \mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_2 - \sqrt{\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1} \sqrt{\mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2} \} \right] \\
 & \text{となる。}
 \end{aligned}$$

$$2\lambda_1(1-\lambda_1) \geq 0$$

であるので、上式の符号を調べるためには、

$$\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_2 - \sqrt{\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1} \sqrt{\mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2}$$

を調べればよい。

ところで、 W は非負行列であるので、任意の t に対して、

$$(t\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)' W (t\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = t^2 \mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1 + 2t \mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2 \geq 0$$

となる。根と係数の関係より、

$$(\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_2)^2 \leq (\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1) (\mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2)$$

が成り立つ。また、

$$\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1 \geq 0, \quad \mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2 \geq 0$$

より、

$$\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_2 \leq \sqrt{\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1} \sqrt{\mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2}$$

となる。以上より、

$$\text{Sign} \left[2\lambda_1(1-\lambda_1) \{ \mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_2 - \sqrt{\mathbf{y}_1' W \mathbf{y}_1} \sqrt{\mathbf{y}_2' W \mathbf{y}_2} \} \right] \leq 0$$

となり、 $\sqrt{(\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2)' W (\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2)}$ は、 λ_1, λ_2 、のあらゆる値に対し、凸となることがわかる。この関係を図で示したものが、(図1)である。

以上のことが、凸集合である生産販売可能集合に属する任意の2点について成り立つので、(図2)に示すような、 $\bar{\mathbf{c}}' \mathbf{x}$ と $\sqrt{\mathbf{x}' W \mathbf{x}}$ の組み合わせを示す領域(X)が描けることになる。

例えば、生産販売可能集合に属する任意の2点が求められていれば、 e 曲線、 f 曲線、 g 曲線上のような組み合わせが可能であり、また、 h 曲線のように、 g 曲線上の任意の点と f 曲線上の任意の点を結んだ曲線も生産販売可能集合に属することになる。そしてそのすべて

の $\bar{c}'x$ と $\sqrt{x'Wx}$ の組み合わせの集合 X はとなり、すべての任意の組み合わせの境界線である効率的な生産販売集合は、 ℓ 曲線上の任意の点になることがわかる。

図 1

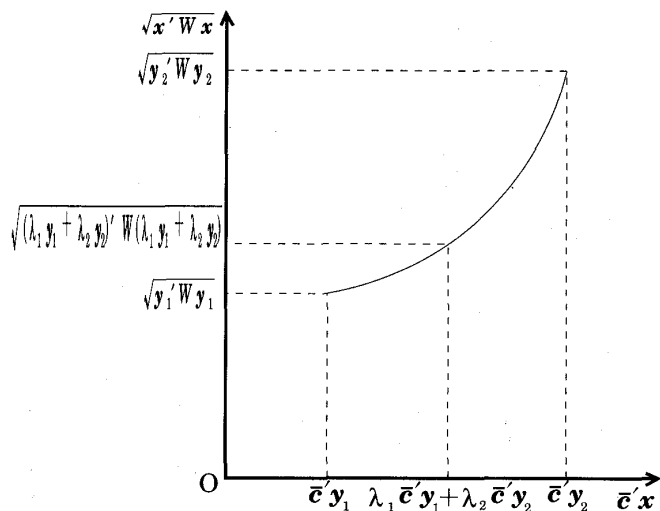
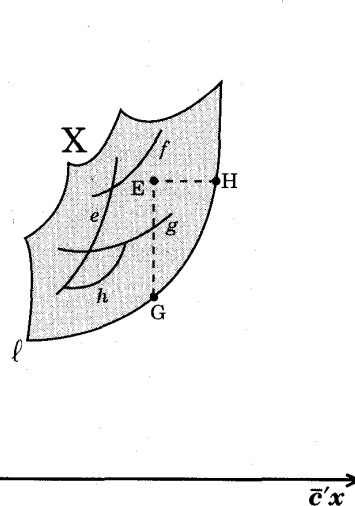


図 2



というのは、例えば、 X に属する E 点と G 点とを比べてみると、

$$(\text{E点の } \bar{c}'x) = (\text{G点の } \bar{c}'x)$$

$$(\text{E点の } \sqrt{x'Wx}) > (\text{G点の } \sqrt{x'Wx})$$

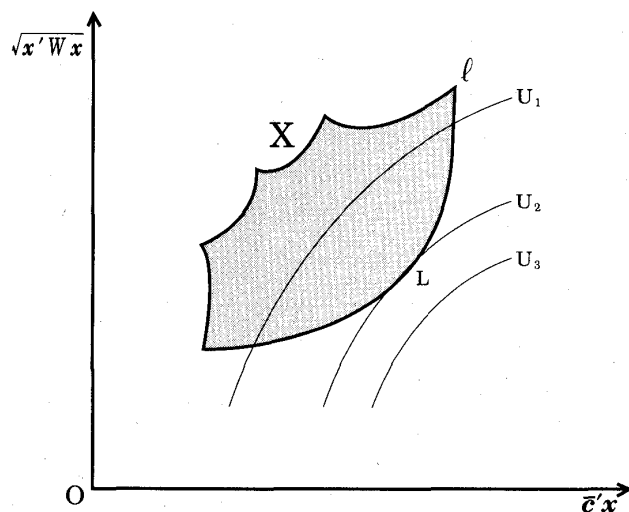
となり、点のほうが、平均値が同じであるにもかかわらず、標準偏差が小さく、効率的であるといえる。 X に属する E 点と H 点を比べると、

$$(\text{E点の } \bar{c}'x) < (\text{H点の } \bar{c}'x)$$

$$(\text{E点の } \sqrt{x'Wx}) = (\text{H点の } \sqrt{x'Wx})$$

となり、 H 点のほうが、標準偏差が同じであるにもかかわらず、平均値が大きいの効率的であるといえるからである。それ故、効率的なすべての点は、 ℓ 曲線上に存在することになる。

図 3



また、効用関数を $U(\bar{c}'x, \sqrt{x'Wx})$ とし、この効用関数がリスク回避型とすれば、一般的に（図3）に描かれているような曲線になる。（図3）は、例として、効用の無差別曲線を3本示しているが、図の右下になるほど効用が高くなることを意味している。すなわち、 $U_3 > U_2 > U_1$ である。生産販売可能集合を満足し、しかも最も効用の高い点は、生産販売集合と効用関数の接点であるL点であることがわかる。そのときの効用関数値は U_2 より求められる。これは、よく知られたポートフォリオ・セレクションの問題である。

次節では、本節で検討した点を基にして、確率付線形制約をもつ確率制約条件計画法を用いた利益計画モデルについて考察してみる。

3. 確率制約条件計画法の最適解の特徴

確率制約条件計画法は確率付計画法の一つであることについて、既に1節で簡単に述べたが、これは不確実性下の最適問題を解く場合によく利用される代表的な計画法の一つである。本節では、Joyce T.Chenの論文のモデル1とモデル3を紹介し、2節での考察結果を基に、補足説明を加えながら最適解の特徴についての考察を一步進めてみる。Chenの論文を主たる考察の対象とするのは、この論文には損益分岐制約と目標利益制約の2種のものが含まれており、また、モデルの基本的特徴を示すのに最も適当と考えたからである。Chenの論文は、基本的にはDavid H.Pyle, Stephen J.Turnovskyの論文[10]を基に考察したものである。

Chenの論文にはモデル2もあるが、モデル1とモデル3のみを考察の対象とするのは、この2種類の型のモデルが、最もよく利用される可能性が高いことによる。このモデル1とモデル3は、モデルの型として、A.Charnes, W.W.Cooperの論文のPモデルとEモデルに該当する。

Charnes, CooperのPモデル、Chenのモデル1は、確率制約条件下で目的関数値がある値以上となる確率を最大化する問題である。本稿では、これをタイプ1のモデルと称して論を進めることにする。Charnes, CooperのEモデル、Chenのモデル3は確率制約条件下で期待値を最大化する問題である。本稿では、これをタイプ2のモデルと称することにする。

タイプ1のモデルを説明する前に、表記をChenの論文に即して、以下のようにする。2節で既に用いられているものはそれを用い、新しい表記のみを示すことにする。

A —— 技術係数のマトリックス

b —— 資源制約値の列ベクトル

k_0 —— 固定費の額

k_1 —— 目標利益の額

α_0 —— 損益分岐点が達成されなければならない最小の確率

α_1 ——目標利益が達成されなければならない最小の確率

また、確率変数は販売価格によって影響された限界利益係数 c のみとし、 c は2節と同様に、平均値 ($\bar{c}$)、分散共分散行列 (W) の多変数正規分布をすると仮定する。その分布関数を F^1 とし、 $1 - F^1 = F$ 、と置くことにする。

上述の表記を用いて、資源技術制約を満たし、ある確率以上で損益分岐制約を満たすという条件下で、固定費プラス目標利益以上の限界利益をもたらす確率を最大化するモデルを示せば、

$$(イ) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Prob.}(\bar{c}'x \geq k_0 + k_1) \longrightarrow \max & (1) \\ \text{Prob.}(\bar{c}'x \geq k_0) \geq \alpha_0 \cdots \cdots (\text{損益分岐制約}) & (2) \\ Ax \leq b \cdots \cdots (\text{資源技術制約}) & (3) \\ x \leq 0 & (4) \end{array} \right.$$

となる。ただし、Prob. は確率を示している。

(イ) を変形すれば、

$$(ロ) \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 \longrightarrow \max & (5) \\ \text{Prob.}(\bar{c}'x \geq k_0 + k_1) \geq \alpha_1 \text{ (目標利益制約)} & (6) \\ \text{Prob.}(\bar{c}'x \geq k_0) \geq \alpha_0 \cdots \cdots (\text{損益分岐制約}) & (7) \\ Ax \leq b \cdots \cdots (\text{資源技術制約}) & (8) \\ x \leq 0 & (9) \end{array} \right.$$

となり、これは、Chen のモデル 1 である。

(ロ) のように変形すればよくわかるのであるが、このモデルにおいて、制約式のなかに損益分岐制約と目標利益制約を含めている。というのは不確実性下では、目標利益の達成という積極的立場と同時に、損失を生じないようにするという安全性を考慮した消極的立場の両者が必要と考えられるからである。そして、目標利益制約をある満足できる確率で満たす解は、必ずしも満足できる損失を生じない確率以上となるとは限らないからである。本稿では、その他の制約を単に資源技術制約としているが、それは問題を簡単にするためからである。販売制約、購入制約、資金制約はもとより各種の制約を含めてモデル化できるが、整理すれば基本的には、制約はパラメータ行列と変数の積、そして右辺の制約値で表されるというくらいの意味で用いている。

(6) 式を変形すれば、

$$\text{Prob.}[(c'x - \bar{c}'x) / \sqrt{x'Wx} \geq \{(k_0 + k_1) - \bar{c}'x\} / \sqrt{x'Wx}] \geq \alpha_1 \quad (10)$$

となる。故に、

$$F[(k_0 + k_1) - \bar{c}'x] / \sqrt{x'Wx} \geq \alpha_1 \quad (11)$$

となる。

ところで、 $\alpha_0 > \alpha_1 > 0.5$ とすれば、

$$F^{-1}(\alpha_1) < 0 \text{ となるので、}$$

$$F^{-1}(\alpha_1) = -q_1, q_1 > 0$$

とする。これを用いて上式を変形すれば、

$$\{(k_0 + k_1) - \bar{c}'x\} / \sqrt{x'Wx} \leq -q_1 \quad (12)$$

となる。以上より、(6)式と等価な制約式は、

$$\bar{c}'x + q_1 \sqrt{x'Wx} \geq k_0 + k_1 \quad (13)$$

であり、同様に、(7)式と等価な制約式は、

$$\bar{c}'x - q_0 \sqrt{x'Wx} \geq k_0 \quad (14)$$

である。ただし、 $F(\alpha_0) = -q_0, q_0 > 0$ 、である。

α_1 を最大化するためには、

$F[\{(k_0 + k_1) - \bar{c}'x\} / \sqrt{x'Wx}] \geq \alpha_1$ 、より考えて、

$\{(k_0 + k_1) - \bar{c}'x\} / \sqrt{x'Wx}$ を最小化すればよい。また、

$\{(k_0 + k_1) - \bar{c}'x\} / \sqrt{x'Wx}$ を最小化するためには、 q_1 を最大化すればよい。よって、(ロ)の問題は、

$$(ハ) \begin{cases} q_1 \longrightarrow \max & (15) \\ \bar{c}'x - q_1 \sqrt{x'Wx} \geq k_0 + k_1 & (16) \\ \bar{c}'x - q_0 \sqrt{x'Wx} \geq k_0 & (17) \\ Ax \leq b & (18) \\ x \geq 0 & (19) \end{cases}$$

と等価な問題となる。

(ハ)の問題は、 $\{Ax \leq b, x \geq 0\}$ を満足する x の生産販売可能集合のうち、制約第一式、制約第二式を満たす範囲内で q_1 を最大化する問題であると解釈することが可能である。このように考えれば、2節で考察したことが応用できる。

また、 $\{Ax \leq b, x \geq 0\}$ を満たす x の集合は可能解が一つでも存在すれば、可能解全体の集合は凸集合である。というのは、可能解を y_1, y_2 とすれば、

$$Ay_1 \leq b, Ay_2 \leq b$$

が成り立ち、 y_1 と y_2 の凸結合で求められた解に対して、 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ を考慮すれば、

$$A(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ay_1 + \lambda_2 Ay_2 \leq \lambda_1 b + \lambda_2 b = (\lambda_1 + \lambda_2) b = b,$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \geq 0$$

が成り立つからである。

以上のことから、(ハ)の $\{Ax \leq b, x \geq 0\}$ を満たす x から作られる $\bar{c}'x$ と $\sqrt{x'Wx}$ の関係の全体集合は、(図4)の斜線部分(X)のようになる。(図4)では、表示上、曲線 ℓ をなめらかに描いているが、線形制約集合の特徴から考えて、なめらかにはならない。しかし、最適解を求める際に図を見ればわかるように、集合(X)が凸集合であるということが重要である。Chenの論文の縦軸は $x'Wx$ となっているが、本稿は $\sqrt{x'Wx}$ としている。

また、(17)式は、

$$\sqrt{x'Wx} \leq 1/q_0 (\bar{c}'x - k_0) \quad (20)$$

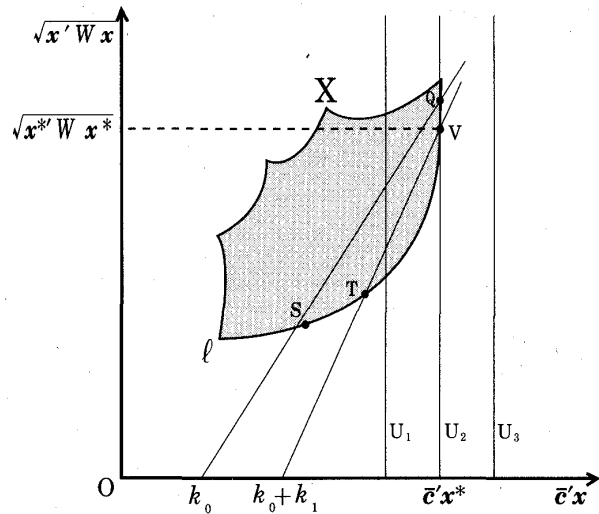
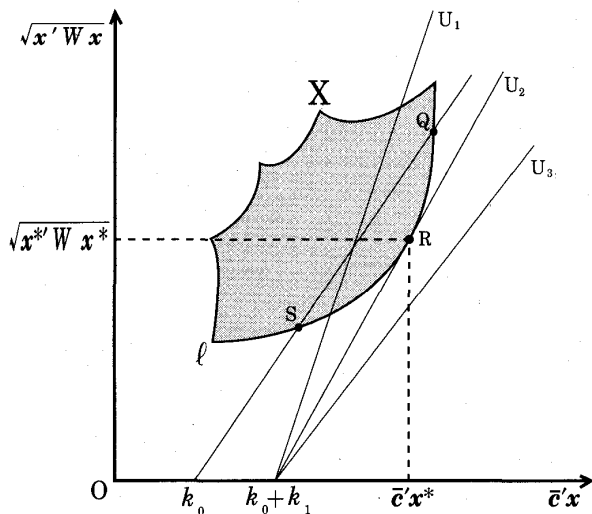
と書くことができ、この式は $\bar{c}'x, \sqrt{x'Wx}$ の座標上では、 $\bar{c}'x$ 軸上の k_0 を通り、傾き $(1/q_0)$ の直線の右下の部分となる。同様に(16)式は、

$$\sqrt{x'Wx} \leq 1/q_1 \{\bar{c}'x - (k_0 + k_1)\} \quad (21)$$

と書くことができ、 $\bar{c}'x$ 軸上の $(k_0 + k_1)$ を通り、傾き $(1/q_1)$ の直線の右下の部分となる。

図 4

図 5



目的関数は q_1 を最大とすることであるので、傾き $(1/q_1)$ を最小にする点を求めることになる。2節で述べたように、最適解は ℓ 曲線上に存在し、しかも損益分岐制約を満たす S から Q までの曲線上に存在することになる。最適解は R 点で与えられる。

ところで、 $\bar{c}'x$ 軸上の $(k_0 + k_1)$ を通る傾き $(1/q_1)$ の直線は、効用の無差別曲線を表しているとも考えることができる。というのは(ハ)の問題は、傾き $(1/q_1)$ の大きさの変化によってのみ、効用(目的関数)が変化するとも考えられるからである。これは2節の(図3)の特殊形態である。(図4)には、効用の無差別曲線が3本示されている。 U_3 は実行不可能で、 $U_1 < U_2$ であるので、 U_2 を通る効用直線上の R 点が実行可能で最も大き

な満足を与えることができる点であると考えることができる。R点において、直線 (U_2) と集合 (X) が接している。X が (図4) のように左上に開いた集合であり、しかも前述したように凸集合であるということから、必ず接点をもつことになる。

以上がタイプ1のモデルの説明であるが、次に、タイプ2のモデルすなわち Chen のモデル3について補足説明を加えながら説明する。このモデルは資源技術制約を満たし、また、ある確率以上で損益分岐制約、ある確率以上で目標利益制約を満たすという条件下で、限界利益の期待値を最大化するモデルである。すなわち、

$$(二) \left\{ \begin{array}{ll} \bar{c}'x \longrightarrow \max & (22) \\ \text{Prob.}(c'x \geq k_0 + k_1) \geq \alpha_1 & (23) \\ \text{Prob.}(c'x \geq k_0) \geq \alpha_0 & (24) \\ Ax \leq b & (25) \\ x \geq 0 & (26) \end{array} \right.$$

となる。(二) と等価な問題を前述と同様にして求めれば、

$$(ホ) \left\{ \begin{array}{ll} \bar{c}'x \longrightarrow \max & (27) \\ \bar{c}'x - q_1 \sqrt{x'Wx} \geq k_0 + k_1 & (28) \\ \bar{c}'x - q_0 \sqrt{x'Wx} \geq k_0 & (29) \\ Ax \leq b & (30) \\ x \geq 0 & (31) \end{array} \right.$$

となる。

(ホ) の問題は、 $\{Ax \leq b, x \geq 0\}$ を満たす x の生産販売集合のうちで、制約第一式と制約第二式を満たす範囲内で、 $\bar{c}'x$ を最大化する問題と解釈することができる。(図4) と同様な方法で、(ホ) の問題を図で表したものが (図5) である。この場合、効用関数は $\bar{c}'x$ 、と考えることができるので $\bar{c}'x$ 軸と垂直になる。

最適解は ℓ 曲線上にあり、しかも損益分岐制約と目標利益制約を満たす T から V までの曲線上にある。(図5) において、効用の無差別曲線が3本示されている。効用関数は、 $\sqrt{x'Wx}$ によって左右されないもので、2節の (図3) の特殊形態である。(図5) において、実行可能でしかも最も大きな効用をもたらすものは U_2 であり、最適解は V であることがわかる。

(ハ) (ホ) のような問題は、Kuhn-Tucker の条件を用いて最適解を求めることができる。前節と本節で詳しく説明したように、その解は凸集合の境界面のどこかの点で与えられることになるので、それは大局的な最適解を与えることになる。一つの別解としては、Kuhn-Tucker 条件が同じとなるような二次計画問題に変形し、もとの問題との関係から、

ある条件を満たすように、試行錯誤によって解を求める方法である。しかし、本稿は解の求め方よりもタイプ1、タイプ2のモデルの意味と、固定費、目標利益の値の変化による解への影響について考察することを目的としているので、解法については詳しく触れないことにする。

以上、(ロ)、(二)の形で与えられる確率制約条件計画法の最適解の性質を、(図4)、(図5)の図を用いて説明してきた。(図4)、(図5)の U_1 , U_2 , U_3 を効用関数というのは、少し抵抗があるが、前述したように、効用関数の特殊形態であるとも考えることもできる。

4. 数値例とC-V-P分析

まず最初に、モデルの条件について述べる。モデルを簡単化するために、3種類の製品のみを生産販売しており、単位当たりの販売価格のみが正規分布をする確率変数であると仮定する。各々の製品の販売価格の期待値は、23(千円)、18(千円)、27(千円)であり、分散共分散行列は、

$$W = \begin{pmatrix} 4, & 1, & 1.5 \\ 1, & 7, & -3 \\ 1.5, & -3, & 5 \end{pmatrix}$$

であるとする。また、変動費は直接材料費、直接労務費、直接経費の3種類の投入要素からなり、各製品単位あたりの変動費は、8(千円)、8(千円)、11(千円)であるとする。変動費の算定の基礎となる材料制約、労働時間制約、経費制約の3種類の制約条件があり、最大限の利用可能値は、それぞれ、40(個)、50(時間)、80(千円)であると仮定する。そして、製品1の一単位の生産には、材料1(個)、労働時間0.6(時間)、経費1(千円)が必要であり、製品2に対しては、材料0.5(個)、労働時間1(時間)、経費1(千円)、製品3に対しては、材料1(個)、労働時間1(時間)、経費2(千円)必要であるとする。固定費は400(千円)、目標利益は200(千円)とする。

$\alpha_0 = 95\%$ 、すなわち、 $q_0 = 1.65$ として、タイプ1のモデルを定式化すれば、

$$(\wedge) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \longrightarrow \max \\ \text{Prob.} \left\{ (15, 10, 16) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 400 + 200 \right\} \geq \alpha_1 \\ \text{Prob.} \left\{ (15, 10, 16) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 400 \right\} \geq 0.95 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1, & 0.5, & 1 \\ 0.6, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

となる. c の期待値と分散共分散行列がわかっていることより, (へ) と等価な問題を求め, 整理すると,

$$(ト) \left\{ \begin{array}{l} q_1 \longrightarrow \max \\ 15x_1 + 10x_2 + 16x_3 \\ -q_1 \sqrt{4x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 6x_2x_3} \geq 600 \\ 15x_1 + 10x_2 + 16x_3 \\ -1.65 \sqrt{4x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 6x_2x_3} \geq 400 \\ x_1 + 0.5x_2 + x_3 \leq 40 \\ 0.6x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

となる. 解を求めれば,

$$\text{最大値 } q_1 = 1.334$$

$$x_1 = 2.169, \quad x_2 = 21.736, \quad x_3 = 26.963$$

となり, $q_1 = 1.334$ であることは, 最適解において, 目標利益制約を約91%満たすことになる. 逆に, これは目標利益制約を満たさない確率が, 約9%あるということを示している. 次に, $\alpha_1 = 80\%$, すなわち $q_1 = 0.84$, として, タイプ2のモデルを定式化し, 最適解を求めてみる.

$$(チ) \left\{ \begin{array}{l} 15x_1 + 10x_2 + 16x_3 \longrightarrow \max \\ 15x_1 + 10x_2 + 16x_3 - 0.84 \sqrt{4x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 6x_2x_3} \geq 600 \\ 15x_1 + 10x_2 + 16x_3 - 1.65 \sqrt{4x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 6x_2x_3} \geq 400 \\ x_1 + 0.5x_2 + x_3 \leq 40 \\ 0.6x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{最大値 } 692.150(\text{千円})$$

$$x_1 = 20.250, x_2 = 36.200, x_3 = 1.651$$

タイプ1のモデルとタイプ2のモデルの解の比較は α_1 の扱い方が根本的に異なっているので難しいが、あえて比較すれば、解には大きな差があることがわかる。限界利益は、(タイプ1のモデル)

$$15 \times 2.169 + 10 \times 21.736 + 16 \times 26.963 = 681.303(\text{千円})$$

(タイプ2のモデル)

$$15 \times 20.250 + 10 \times 36.200 + 16 \times 1.651 = 692.150(\text{千円})$$

となり、本稿の数値例では、目的関数値に両者あまり大きな差はない。しかし、最適解に大きな差があることから考えて、どのモデルを採用するかについて慎重である必要がある。タイプ1のモデルは、限界利益を最大化することが目的でなく、いわば消極的なモデルである。これに対し、タイプ2のモデルは、限界利益の最大化を目指した積極的モデルであるということができる。

タイプ1のモデルとタイプ2のモデルの最適解を基に、収益、費用項目の計画値を示してみる。ただし、材料一単位当たりの単価は5(千円)で、労働時間単位当たりの賃率は4(千円)とする。各製品の単位当たりの変動費算定の基礎データは、(表1)の通りであったと仮定する。

(表1) 変動費算定の基礎データ (単位：千円)

製品種類ごとの変動費 細目	製品1の単位あたり 変動費			製品2の単位あたり 変動費			製品3の単位あたり 変動費		
	単価 賃率	消費 量 労働時間	金額	単価 賃率	消費 量 労働時間	金額	単価 賃率	消費 量 労働時間	金額
直接材料費	5	1	5	5	0.6	3	5	1	5
直接労務費	4	0.5	2	4	1	4	4	1	4
直接経費	—	—	1	—	—	1	—	—	2
(合計)	—	—	8	—	—	8	—	—	11

(表1)を基に、計画値を示したものが(表2)(表3)である。ただし、販売価格は確率変数であるので、期待値を用いている。(表2)(表3)から、販売価格の期待値を用いて算定した

(表2) タイプ1のモデルの計画値 (単位：千円)

製品種類	製品1	製品2	製品3	合計
売上高	49.9	391.2	728.0	1169.1
変動費	17.3	173.8	296.6	487.7
直接材料費	10.8	65.2	134.8	210.8
直接労務費	4.3	86.9	107.9	199.1
直接経費	2.3	21.7	53.9	77.8
限界利益	32.8	217.4	431.4	681.4
固定費	—	—	—	400.0
営業利益	—	—	—	281.4

利益は、両者のモデルとも損益分岐制約を満たし、タイプ2のモデルでは目標利益制約を

満たしていることがわかる。

(表3) タイプ2のモデルの計画値 (単位：千円)

製品種類	製品1	製品2	製品3	合計
売上高	465.8	651.6	44.6	1162.0
変動費	162.1	289.6	18.2	469.9
直接材料費	101.3	108.6	8.3	218.2
直接労務費	40.5	144.8	6.6	191.9
直接経費	20.3	36.2	3.3	59.8
限界利益	303.7	362.0	26.4	692.1
固定費	—	—	—	400.0
営業利益	—	—	—	292.1

5. モデルの係数の変化による最適解への影響

前節において、最適解の特徴を図を用いて説明したが、本節ではモデルの係数が変化したときの最適解への影響に焦点を当てることにする。特に、固定費と目標利益額の変化によるタイプ1とタイプ2のモデルの最適解への影響に焦点を当てることにする。

この分析は感度分析としてよく知られているが、この分析はパラメータの値が変化することを前提とする以上、事実上そのパラメータが政策変数であるか、確定的でないかを前提としていることになる。パラメータ値が政策変数である場合は、それについて感度分析すれば各種の情報が得られる。一方、不確実な状態を扱うために、最も起こりそうな確定的な値を設定し、感度分析で不確実性によって生じるさまざまな場合に対処することもある。本稿では、固定費、目標利益について感度分析を行い、価格係数は正規乱数と仮定した場合を扱っている。固定費の変化と目標利益の変化は、どちらも制約式の右辺の値の変化である。しかし、以下に示す本節の図からもわかるように、両者の値の変化が最適解に与える影響は、タイプ1のモデルとタイプ2のモデルでは基本的に異なっている。また、目標利益は政策変数と考え、意図的に変えることができるものであるが、固定費はむしろ企業内外の環境によって与えられるという違いもある。

まず、固定費の変化によるタイプ1のモデルへの影響について考察する。固定費が増加することにより、(図4)における $\bar{c}'x$ 軸上の切片が変化することになる。もし固定費が増大しても、少なくとも利益ゼロ以上となる確率(α_0)が変化しないとすれば、3節で述べたように、傾き($1/q_0$)は変化しないで一定である。 $k_0^{(1)}$ から $k_0^{(2)}$ へ固定費が変化した場合の最適解への影響を(図6)に示している。

(図6)において、傾き($1/q_0$)を一定とすれば、 $\bar{c}'x$ 軸上の $k_0^{(1)}$ を通る直線と $k_0^{(2)}$ を通る直線は平行になる。また(図6)に示されるように、効率的な生産販売可能集合を表す ℓ 曲線と交わる点は、 Q 点、 S 点から $\tilde{Q}$ 点、 $\tilde{S}$ 点へと変化することになる。

図 6

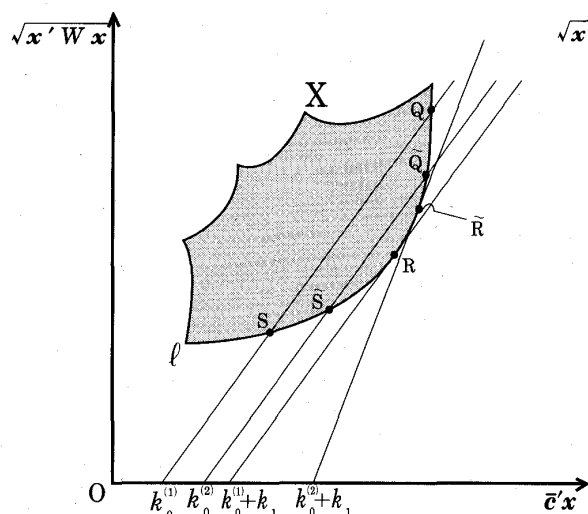
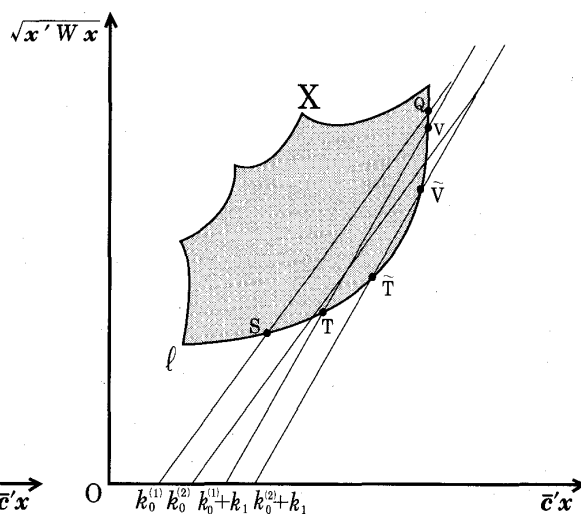


図 7



それ故、生産販売可能集合を満たし、少なくともゼロ以上の利益をもたらす確率が (α_0) 以上となる効率的な集合は、 l 曲線上の $\tilde{Q}$ 点と $\tilde{S}$ 点を結ぶ範囲内になる。これは固定費が増大することにより、選択可能な領域が小さくなったことを示している。(図6) から示されるように、最適解は R 点から $\tilde{R}$ 点へと変化することになる。

固定費が上昇し続けると、 l 曲線と $\bar{c}'x$ 軸上の $k_0^{(2)}$ を通る直線が交わらない場合も起こる。この場合は実行可能解が求まらない場合である。 $\tilde{Q}$ より上の点で、 $\bar{c}'x$ 軸上の $k_0^{(2)} + k_1$ を通る直線が接する場合には、 $\tilde{Q}$ 点が最適解となる。逆に、 $\tilde{S}$ より下の点で接する場合には、 $\tilde{S}$ 点が最適解となる。

同様に、 α_0, α_1 が一定で、固定費が増大した場合のタイプ 2 のモデルについて考察してみる。この場合を図で示したものが (図7) である。(図7) に示されるように、 α_0, α_1 が一定であるとすれば、最適解が存在する l 曲線上の範囲は、 T 点と V 点を結ぶ曲線上から、 $\tilde{T}$ 点と $\tilde{V}$ 点を結ぶ曲線上に変化し、その範囲は小さくなる。そして、最適解は V 点から $\tilde{V}$ 点に変化することになる。

以上は、固定費が上昇しても、 α_0, α_1 が変化しない場合を考察したが、固定費が上昇すれば、 α_0 を大きくするような心理的効果が生ずる場合もある。すなわち、固定費が上昇すれば、その固定費の回収を確実にしようとする場合である。 α_0 が大きくなれば、傾き $(1/q_0)$ は減少することになり、最適解の存在する l 曲線上の範囲は、より小さくなるであろう。固定費が減少する場合には、これと逆の同様の考察が可能である。

通常の数理計画問題において、固定費の変化は最適解を変化させないので、固定費を無視して問題を定式化する場合が多いが、本稿で考察しているモデルは、固定費の変化によって最適解が変化することになる。

次に、目標利益だけが $k_1^{(1)}$ から $k_1^{(2)}$ へ変化する場合を考えてみる。(図8) はタイプ 1

のモデルの場合を示し、(図9)はタイプ2のモデルの場合を示している。ただし(図9)では、 α_1 を一定と仮定している。(図8)に示しているように、目標利益が $k_1^{(1)}$ から $k_1^{(2)}$ へ変化することにより、最適解は R 点から $\hat{R}$ 点へ変化することになる。また(図9)に示しているように、最適解は V 点から $\hat{V}$ 点へ変化することになる。目標利益があまり大きくなると、(図9)の場合は可能解をもたなくなる場合がある。

図 8

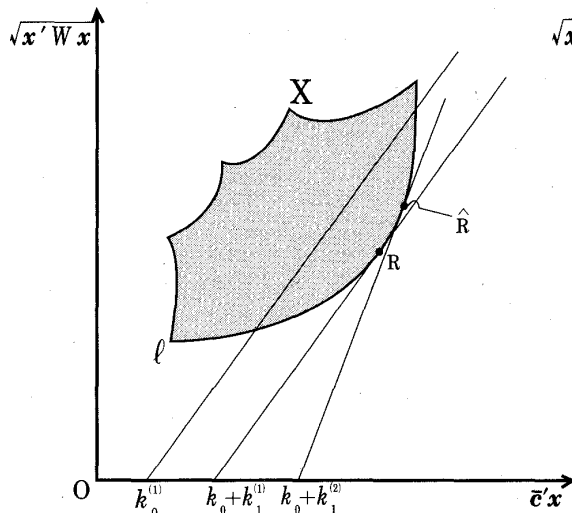
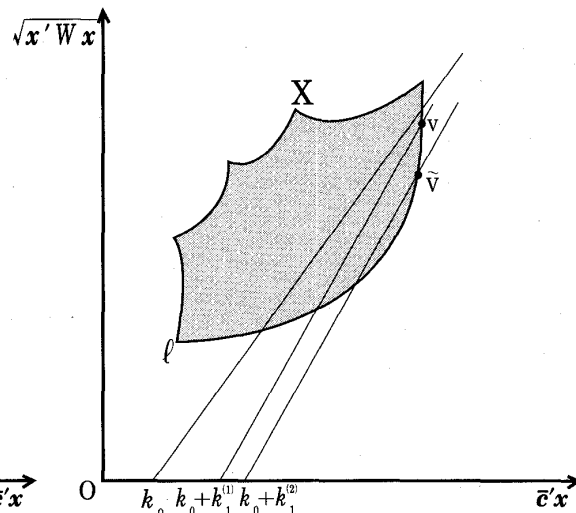


図 9



タイプ2のモデルにおいて、目標利益の達成を確実なものとするためには、 α_1 の値を大きくしたモデルを作成すればよい。 α_1 が大きくなれば、傾き $(1/q_0)$ が減少し、最適解が存在する範囲は小さくなる。その他のモデルの係数の変化として、 A 、 b の変化が考えられるが、これらの変化は X の集合の大きさや形に影響を与えることになる。また価格係数の期待値($\bar{c}$)、分散共分散行列(W)が本稿で仮定したように、確定値でなく推定されるものであれば、感度分析を行う必要がある。 c の要素が変化した場合には、今までの $\sqrt{x'Wx}$ の値に対して、図表上では横軸のスケールが変わることになる。また W のある要素が変化した場合には、今までの $\bar{c}'x$ 値に対して、縦軸のスケールが変わることになる。

7. おわりに

本稿は、不確実性下における利益計画モデルを確率制約条件計画法を用いて定式化し、C-V-P分析を行う方法について考察した。

不確実性下のモデルを定式化するためには、リスクをいかに処理するかが最大の問題点である。リスクの扱い方についての研究は数多くあるが、モデルを操作的ならしめるためには、確率事象とそれが起こる確率を算定する必要がある。発生事象の確率は客観的判断のみで決定される場合もあるが、その決定には主観的判断が含まれる場合も多いと思われる。

る。しかも、不確実性下の問題は確実性下の問題よりも、確率の決定以外のパラメータの決定についても、主観的判断が多く含まれることも事実である。それ故、発生事象の確率、モデルのパラメータを適切に測定あるいは判断することが、モデルの適否を決める要因になる。本稿は、客観的なあるいは適切な確率情報やモデルのパラメータが得られているとして、モデルを定式化している。

モデルの定式化の方法として、確率制約条件計画法を採用しているが、この計画法は確率をモデルの中に直接含めて定式化できるという特徴を持っている。また、確率事象の期待値、分散共分散がわかっており、分布の型も正規分布とわかっているならば、比較的簡単に確定的な等価問題を求めることができるという利点を持っている。本稿のように共分散をゼロとしなければ、非線形の等価な計画問題となる。これに対し、共分散をゼロとすれば、線形の等価な計画問題となる。どちらの場合にも確定的な場合と同じ大きさの問題に帰着する。しかし、正規分布以外の分布を仮定する場合には、問題は少し複雑となる。また、期待値と分散がわかっているが分布の型がわからない場合、チェビシェフの不等式を用いて問題を定式化できるが、問題は非常に粗くなり実行可能解が求まらない場合も多くなる。

確率制約条件計画問題は確率変数を含んでいるので、確実性下の問題と比べて計算量が著しく増大し、期待値、分散共分散を推定しなければならないという問題もある。また、序論で述べたように、個々の正規分布する事象の積の分布は正規分布しないという点にも注意する必要がある。また、発生する事象、発生する確率そのものの境界がはっきりしないで、あいまいであるような場合、すなわちファジィ状態では、本稿のような定式化ではなく別の定式化が必要になる。

本稿は、確率制約条件計画法の解の特徴を図を用いて説明している。その図は限界利益の期待値とその標準偏差を座標軸としたものであり、製品の特性は期待値と標準偏差にすべて要約されることになる。また、モデルは3節で述べたように、生産販売可能集合の効率的集合の中で、特殊な形態を持った効用関数を最大化するという問題と解釈することも可能である。これはポートフォリオ選択問題とよく似た問題として解釈可能であることを意味する。

本稿は、C-V-P分析についても考察しているが、アプローチ法として、計画モデルの最適解を求め、この解によるC-V-P分析をする方法を採用した。この方法は多品種問題へC-V-P分析を展開する一つの接近法である。というのは、数理計画法を用いれば、製品のミックス問題を計画問題の中に取り入れることができ、それによって、C-V-P分析の方法も改善できるからである。本稿において、確率制約条件計画法による利益計画モデルの設定に重点を置いたのも以上の理由による。

謝辞

この論文の審査段階で、2人の匿名のレフェリーの先生方から適切なコメントや修正箇所の指摘を戴きました。ここに記して深く感謝の意を表したいと思います。

参考文献

- [1] Brockett, P., A. Charnes, W. W. Cooper and Hong-Chul Shin: "A Chance Constrained Programming Approach to Cost-Volume-Profit Analysis", *The Accounting Review*, July, 1984.
- [2] Charnes, A. and W. W. Cooper: "Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance Constraints", *Operations Research*, Vol. 11, No. 1, January-February, 1963.
- [3] Chen, J. T.: "Cost-Volume-Profit Analysis in Stochastic Programming Models", *Decision Sciences*, Vol. 11, No. 4, October, 1980.
- [4] Ferrara, W. L., J. C. Hayya and D. A. Nachman: "Normalcy of Profit in the Jaedicke-Robichek Model", *The Accounting Review*, October, 1964.
- [5] Hilliard, J. E. and R. A. Leitch: "Cost-Volume-Profit Analysis under Uncertainty: A Log Normal Approach", *The Accounting Review*, January, 1975.
- [6] Jaedicke, R. K. and A. A. Robichek: "Cost-Volume-Profit Analysis under Conditions of Uncertainty", *The Accounting Review*, October, 1964.
- [7] Johnson, G. L. and Stephen Simik: "Multiproduct C-V-P Analysis under Uncertainty", *Journal of Accounting Research*, Autumn, 1971.
- [8] Kataoka, S.: "A Stochastic Programming Model", *Econometrica*, Vol. 31, No. 1-2 January-April, 1963.
- [9] Liao, M.: "Model Sampling: A Stochastic Cost-Volume-Profit Analysis", *The Accounting Review*, October, 1975.
- [10] Pyle, D. H. and S. J. Turnovsky: "Safety-First and Expected Utility Maximization in Mean-Standard Deviation Portfolio Analysis", *The Review of Economics and Statistics*, 1970.

PROFIT PLANNING MODELS AND C-V-P ANALYSES UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY: APPLICATIONS OF CHANCE CONSTRAINED PROGRAMMING

Kazuki Hamada*

ABSTRACT

The purpose of this paper is to consider profit planning models applying chance constrained programming and to analyze C-V-P relationship by using the optimal solution. By knowing the relationship, managers can understand the process of profit generation collectively and clarify the problems.

The relation between mathematical programming and C-V-P analysis is not direct; however, if managers do C-V-P analysis by the optimal solution, they can manage easily the problem of a multiproduct production company with several constraints. Also, the model can be applied to many situations by changing the formulation.

The author simplifies the model extremely to clarify the fundamental features and is working on the assumption that only the sales price is random. Using figures, the author investigates the features of profit planning models using two types of chance constrained programming. Besides, the affect of the optimal solution and the C-V-P relationship by changing the coefficients of model are considered in the figures.

KEYWORDS

Profit Planning Model, C-V-P Analysis, Chance Constrained Programming, Uncertainty, Break-even Point

Submitted December 1992

Accepted July 1993

*Professor, Faculty of Commerce, Seinan Gakuin University